## § 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

*Математическим круговым маятником* называется материальная точка, движущаяся в одной и той же вертикальной плоскости по окружности под действием силы тяжести. Математическим маятником является груз достаточно малых размеров, подвешенный к неподвижной точке $O$ с помощью невесомого стержня или невесомой нерастяжимой нити (рис. 128). Расстояние $OM=l$ называют длиной математического маятника. Положение материальной точки $M$ можно охарактеризовать углом $\varphi$, отсчитываемым от вертикали — положения равновесия маятника.

Математический маятник можно рассматривать как систему с одной степенью свободы. Связь в виде нити или стержня является идеальной. Выберем за обобщенную координату угол $\varphi$. Составим для маятника уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q.$$

Кинетическая энергия $T$ математического маятника

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{ml^2\dot\varphi^2}{2}=\frac{Pl^2}{g}\frac{\dot\varphi^2}{2},$$

так как

$$v=l\dot\varphi.$$

Активная сила — сила тяжести $\bar P$ — является потенциальной силой; следовательно, обобщенная сила $Q$ через потенциальную энергию выразится в виде

$$Q=-\partial \Pi/\partial\varphi.$$

Для того чтобы вычислить потенциальную энергию в отклоненном положении маятника, следует подсчитать работу силы тяжести при перемещении точки $M$ из этого положения в положение равновесия $M_0$, где $\varphi=0$. Работа равна произведению силы тяжести на высоту опускания точки $M$ и является положительной величной, т. е.

$$\Pi=A_{MM_0}=Pl(1-\cos\varphi);$$
$$Q=-\partial\Pi/\partial\varphi=-Pl\sin\varphi.$$

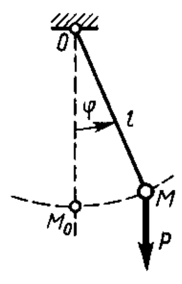

Рис. 128

Вычисляем производные, входящие в уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=\frac{Pl^2}{g}\dot\varphi;\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=\frac{Pl^2}{g}\ddot\varphi.$$

Уравнение Лагранжа для математического маятника после переноса всех членов в левую часть выразится в форме



$$\ddot\varphi+\frac{g}{l}\sin\varphi=0. \tag{48}$$

Получено нелинейное дифференциальное уравнение. Оно не интегрируется в элементарных функциях.

В случае малых колебаний, когда $\varphi$ достаточно мало, можно считать $\sin\varphi\approx\varphi$. Уравнение малых собственных колебаний математического маятника примет форму

$$\ddot\varphi+\frac{g}{l}\varphi=0, \tag{49}$$

или $\ddot\varphi+k^2\varphi$, где круговая частота колебаний $k=\sqrt{g/l}$. Его решение имеет вид

$$\varphi=A\sin(kt+\alpha).$$

Постоянные величины $A$ и $\alpha$ являются амплитудой и начальной фазой. Период малых колебаний математического маятника

$$\tau=2\pi/k=2\pi\sqrt{l/g}. \tag{50}$$

Малые колебания математического маятника являются гармоническими. Период их колебания зависит только от длины математического маятника и ускорения силы тяжести и не зависит от амплитуды колебаний. Так как ускорение силы тяжести $g$ зависит от широты места, то, следовательно, период малых колебаний математического маятника тоже зависит от широты.

Отмеченными свойствами, очевидно, не обладают колебания математического маятника, которые не являются малыми. Эти колебания уже не являются гармоническими, и их период колебаний зависит от амплитуды $A$.

Как показывает более подробное исследование, эту зависимость периода колебаний от амплитуды можно выразить в виде ряда:

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{A}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{A}{2}+\ldots\right].$$

Если принять $\sin A/2\approx A/2$ и удержать первые два члена ряда, то получим приближенную формулу для периода колебаний в зависимости от амплитуды:

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{A^2}{16}\right).$$

*Физическим маятником* называется твердое тело, вращающееся под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс (рис. 129). Ось вращения физического маятника называется *осью привеса*,



а точка ее пересечения $O$ с перпендикулярной оси привеса вертикальной плоскостью, в которой находится центр масс, называется *точкой привеса*.

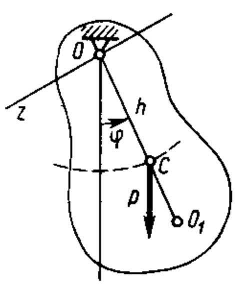

Рис. 129

Физический маятник можно считать системой с одной степенью свободы. За обобщенную координату примем угол $\varphi$ между вертикалью и отрезком $OC$, соединяющим точку привеса $O$ с центром масс $C$. Считаем, что трения в подшипниках оси привеса нет и, следовательно, связи, наложенные на маятник, являются идеальными. Составим для физического маятника уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}.$$

Кинетическая энергия маятника как твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной горизонтальной оси привеса $Oz$, определяется по формуле

$$T=J_{Oz}\frac{\dot\varphi^2}{2},$$

где $J_{Oz}$ — момент инерции маятника относительно его оси привеса.

Потенциальная энергия вычисляется так же, как и для математического маятника:

$$\Pi=Ph(1-\cos\varphi)=Mgh(1-\cos\varphi),$$

где $P$ — сила тяжести; $M$ — масса физического маятника и $h=OC$.

Производные, входящие в уравнение Лагранжа,

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=J_{Oz}\dot\varphi;\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=J_{Oz}\ddot\varphi;$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}=Mgh\sin\varphi.$$

Уравнение Лагранжа после деления обеих частей на $J_{Oz}$ и переноса всех членов в одну часть принимает вид

$$\ddot\varphi+\frac{Mgh}{J_{Oz}}\sin\varphi=0. \tag{51}$$

Его можно получить применив к физическому маятнику дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:



$$J_{Oz}\ddot\varphi=\sum_{k=1}^{N}M_{Oz}(\bar F_k^{(e)}),$$

где

$$\sum_{k=1}^{N}M_{Oz}(\bar F_k^{(e)})=-Ph\sin\varphi.$$

В случае малых колебаний $\sin\varphi\approx\varphi$ и дифференциальное уравнение примет форму

$$\ddot\varphi+\frac{Mgh}{J_{Oz}}\varphi=0$$

или

$$\ddot\varphi+k^2\varphi=0, \tag{52}$$

где $k^2=Mgh/J_{Oz}=Ph/J_{Oz}$.

Если для физического маятника ввести условную длину $l=J_{Oz}/(Mh)$, то период его малых колебаний через эту длину выразится так же, как и период математического маятника. Действительно,

$$\tau=2\pi/k=2\pi\sqrt{J_{Oz}/(Mgh)}=2\pi\sqrt{l/g}. \tag{53}$$

Эту условную длину $l=J_{Oz}/(Mh)$называют *приведенной длиной физического маятника*.

Малые собственные колебания физического маятника, так же как и математического, являются гармоническими с периодом, не зависящим от амплитуды.

Если от точки привеса $O$ отложить по линии $OC$ приведенную длину физического маятника $l$, то получим точку $O_1$, которая называется *центром качаний*. Для приведенной длины физического маятника справедливы следующие теоремы Гюйгенса.

1. Приведенная длина физического маятника больше расстояния от точки привеса до центра масс, т. е. $l>h$. Для доказательства теоремы применим к физическому маятнику теорему Штейнера о связи моментов инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Получим

$$l=\frac{J_{Oz}}{Mh}=\frac{J_{Cz}+Mh^2}{Mh}=\frac{J_{Cz}}{Mh}+h>h, \tag{54}$$

так как отрезок $O_1C=J_{Cz}/(Mh)=l-h>0$. Здесь $J_{Cz}$ — момент инерции относительно горизонтальной оси, параллельной оси привеса и проходящей через центр масс.

2. Центр качаний и точка привеса физического маятника взаимны, т. е. если то же твердое тело подвесить за горизонтальную ось, проходящую через центр качаний, параллельно первоначальной оси, проходящей через точку привеса, то получим новый физический маятник, приведенная длина которого равна приведенной длине прежнего маятника, т. е. $l_1=l$



Вычислим приведенную длину $l_1$ физического маятника, у которого ось привеса проходит через точку $O_1$ — центр качаний прежнего маятника. Согласно определению приведенной длины, применяя теорему Штейнера, имеем

$$l_1=\frac{J_{O_1z}}{MO_1C}=\frac{J_{Cz}+M(l-h)^2}{M(l-h)}=\frac{J_{Cz}}{M(l-h)}+l-h=l,$$

так как из (54) следует, что $J_{Cz}=Mh(l-h)$.

Если от точки $O_1$ отложить отрезок $l_1=l$, то получим точку $O$, т. е. центр качаний и точка привеса взаимны. Периоды малых колебаний физических маятников вокруг горизонтальных осей, проходящих через точку привеса и центр качаний, одинаковы.

Важное прикладное значение теории малых колебаний физического маятника состоит в том, что ее можно положить в основу экспериментального определения моментов инерции тел. Для опытного определения момента инерции тела силой тяжести $P$ относительно какой-либо оси достаточно сделать эту ось горизонтальной осью привеса, определить период малых колебаний тела вокруг этой оси и расстояние от точки привеса до центра масс. Тогда, согласно (53), момент инерции относительно горизонтальной оси привеса определится по формуле

$$J_{Oz}=\frac{\tau^2}{4\pi^2}Ph. \tag{55}$$